

Analisi I

Limiti di funzioni reali

01 – Introduzione.

Abbiamo già introdotto il concetto di limite per quanto riguarda le successioni. Estenderemo in questo capitolo il concetto di limite alle funzioni numeriche reali.

I limiti sono di fondamentale importanza in tutta l'analisi matematica. Derivate ed integrali sono essi stessi dei limiti.

02 – Funzioni numeriche reali.

Preso un sottoinsieme A di \mathbb{R} ogni $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è detta funzione numerica reale di dominio A . Il dominio può essere anche \mathbb{R} stesso.

Una funzione (d'ora in poi ometteremo per semplicità il termine “numerica reale”) può essere indicata anche con $y = f(x)$.

Due funzioni su un dominio dato possono essere sommate, sottratte, moltiplicate e divise (il denominatore deve essere diverso da 0 per ogni punto del dominio) ottenendo così una nuova funzione sullo stesso dominio. Una funzione può essere moltiplicata per una costante e di una funzione si può determinare il valore assoluto.

Date due funzioni sullo stesso dominio, se una è maggiore od uguale dell'altra (per ogni punto del dominio) essa si chiamerà maggiorante della prima, se è minore, minorante.

L'insieme di tutte le funzioni numeriche reali definite sul dominio A si indica col simbolo :

$$F_A$$

03 – Limite di una funzione in un punto.

Sia f appartenente ad F_A ed x_0 appartenente a $D(A)$. Per x che tende ad x_0 possono aversi tre casi :

- limite finito in x_0 . La funzione **converge** a l o ha **limite** l per x che tende a x_0 se :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta(\varepsilon) \in \mathbb{R}^+ \ni |f(x) - l| < \varepsilon, \forall x \in (]x_0 - \delta(\varepsilon), x_0 + \delta(\varepsilon)[- \{x_0\}) \cap A$$

Si scriverà allora :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

oppure

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} l$$

- limite infinito positivo in x_0 . La funzione **diverge positivamente** o ha **limite $+\infty$** per x che tende a x_0 se :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R} \exists \delta(\varepsilon) \in \mathbb{R}^+ \ni f(x) > \varepsilon, \forall x \in (]x_0 - \delta(\varepsilon), x_0 + \delta(\varepsilon)[- \{x_0\}) \cap A$$

Si scriverà allora :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

oppure

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$$

- limite infinito negativo in x_0 . La funzione **diverge negativamente** o ha **limite $-\infty$** per x che tende a x_0 se :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R} \exists \delta(\varepsilon) \in \mathbb{R}^+ \ni f(x) < \varepsilon, \forall x \in (]x_0 - \delta(\varepsilon), x_0 + \delta(\varepsilon)[- \{x_0\}) \cap A$$

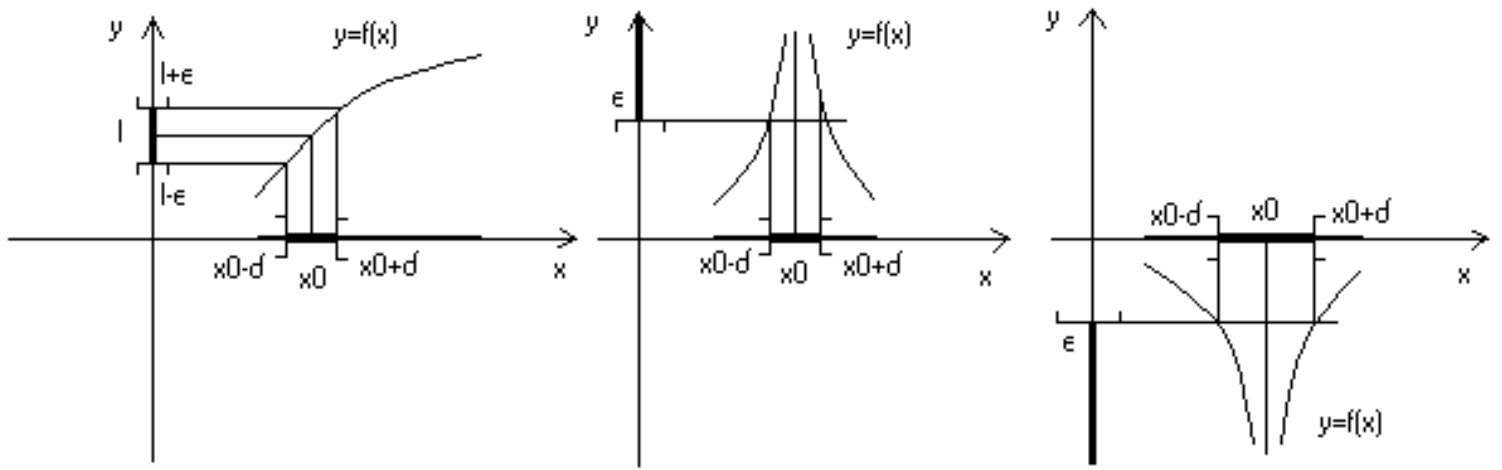
Si scriverà allora :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

oppure

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} -\infty$$

Graficamente, nell'ordine (semplici casi emblematici) :



Il limite in un punto può essere anche considerato tendendo ad esso da destra (per valori maggiori) o da sinistra (per valori minori). I limiti così definiti si chiamano limite destro e limite sinistro e si indicano con :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$$

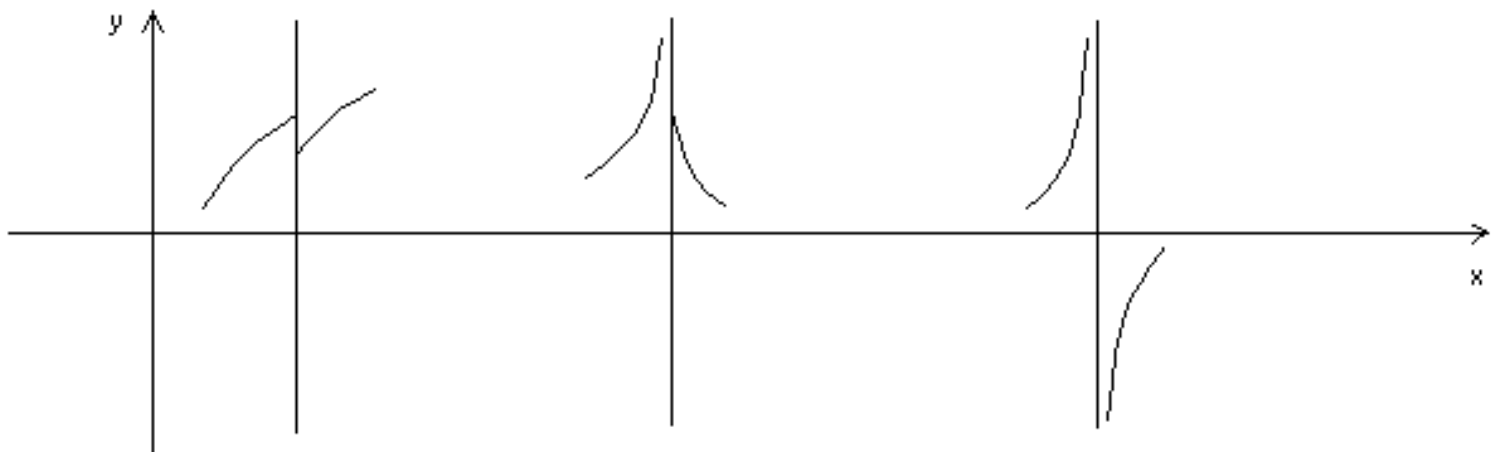
oppure

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$$

Se in un punto il limite destro coincide col limite sinistro, allora in quel punto la funzione ha limite (coincidente con i limite destro e sinistro).

In un punto, infine, può non esistere il limite ma possono esistere il limite destro ed il limite sinistro (diversi). Oppure solo il limite destro o solo il limite sinistro, o nessuno dei due.

Diamo un esempio di grafici di alcune funzioni in cui i limiti destri e sinistri in un punto sono diversi :



04 – Limite di una funzione all'infinito.

Sia f appartenente ad $\mathbb{R}A$ ed il dominio di f sia illimitato a destra . Per x che tende all'infinito possono aversi tre casi :

- limite finito. La funzione **converge** a l o ha **limite** l per x che tende a $+\infty$ se :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta(\varepsilon) \in \mathbb{R} \ni |f(x) - l| < \varepsilon, \forall x \in A \cap]\delta(\varepsilon), +\infty[$$

Si scriverà allora :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$$

oppure

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} l$$

- limite infinito positivo. La funzione **diverge positivamente** o ha **limite** $+\infty$ per x che tende a $+\infty$ se :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R} \exists \delta(\varepsilon) \in \mathbb{R} \ni f(x) > \varepsilon, \forall x \in A \cap]\delta(\varepsilon), +\infty[$$

Si scriverà allora :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

oppure

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

- limite infinito negativo. La funzione **diverge negativamente** o ha **limite** $-\infty$ per x che tende a $+\infty$ se :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R} \exists \delta(\varepsilon) \in \mathbb{R} \ni f(x) < \varepsilon, \forall x \in A \cap]\delta(\varepsilon), +\infty[$$

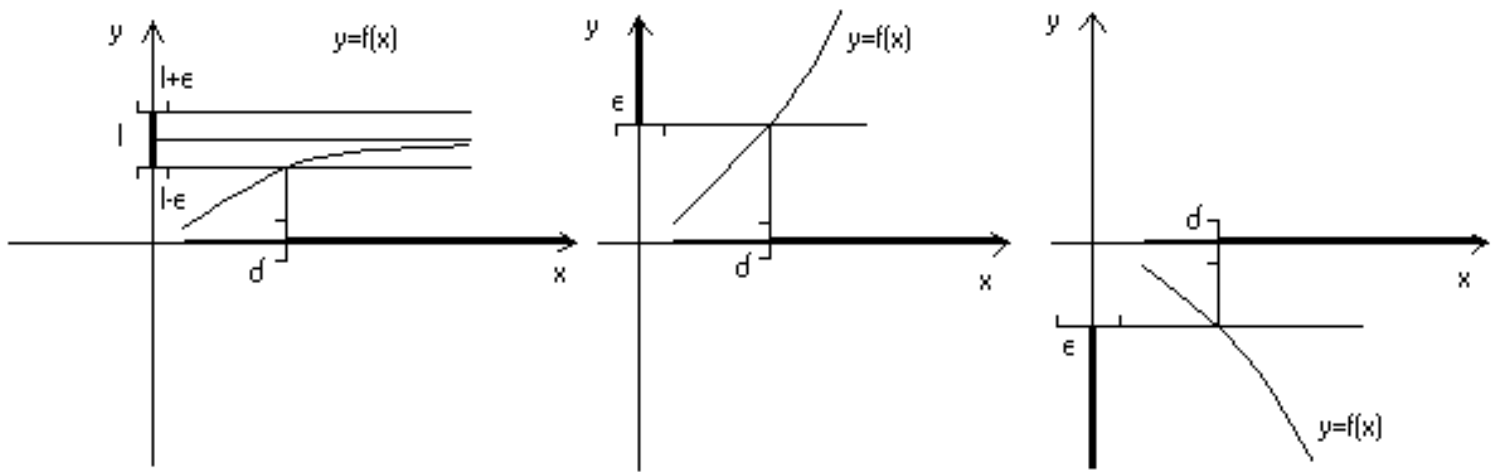
Si scriverà allora :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

oppure

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$$

Graficamente, nell'ordine (semplici casi emblematici) :



Casi analoghi si hanno per x tendente a $-\infty$.

05 – Calcolo dei limiti.

Il limite in un punto o all'infinito può non esistere, però, se esiste, esso è unico.

Così come per le successioni, anche per le funzioni non esistono metodi generali per il calcolo dei limiti con la sola importante eccezione delle funzioni continue (vedi apposito capitolo) per le quali il limite in un punto è uguale al valore della funzione in quel punto. Siccome le funzioni continue costituiscono la classe di funzioni che si incontra più spesso, calcolare un limite quindi è spesso una operazione di routine.

Il calcolo dei limiti può risultare invece problematico dove la funzione non è continua, nei punti dove diverge, agli infiniti e nei casi delle forme indeterminate (vedi di seguito).

In ogni caso, ipotizzato il valore di un limite, è sempre possibile verificarne l'esattezza applicando ad esso la definizione. Rimandiamo al capitolo sulle successioni l'esempio di verifica di un limite.

Per il calcolo dei limiti risultano importanti i seguenti teoremi (di cui ometteremo le dimostrazioni).

Date due funzioni f e g sul dominio A che convergono nel punto x_0 ai limiti finiti rispettivamente a e b si ha :

$$f + g \rightarrow a + b \quad \text{per } x \text{ tendente a } x_0$$

$$f - g \rightarrow a - b \quad \text{per } x \text{ tendente a } x_0$$

$$f * g \rightarrow a * b \quad \text{per } x \text{ tendente a } x_0$$

$$c * f \rightarrow c * a \quad \text{per } x \text{ tendente a } x_0, \text{ dove } c \text{ è un numero reale}$$

$$|f| \rightarrow |a| \quad \text{per } x \text{ tendente a } x_0$$

Se inoltre b è diverso da 0 e g è diversa da zero per ogni punto di A si ha :

$f/g \rightarrow a/b$ per x tendente a x_0

Se invece una delle due funzioni diverge per x tendente ad x_0 (o tende a 0 in certi casi particolari) si ha la seguente tabella :

f	g	f + g	f * g	f / g
$\rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow x_0$	inf. limitata nell'intorno di x_0	$\rightarrow +\infty$		
$\rightarrow -\infty$ per $x \rightarrow x_0$	sup. limitata nell'intorno di x_0	$\rightarrow -\infty$		
$\rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow x_0$	positiva nell'intorno di x_0		$\rightarrow +\infty$	
$\rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow x_0$	negativa nell'intorno di x_0		$\rightarrow -\infty$	
$\rightarrow 0$ per $x \rightarrow x_0$	limitata nell'intorno di x_0		$\rightarrow 0$	
$\rightarrow l > 0$ per $x \rightarrow x_0$	$\rightarrow 0$ e positiva nell'intorno di x_0			$\rightarrow +\infty$
$\rightarrow l > 0$ per $x \rightarrow x_0$	$\rightarrow 0$ e negativa nell'intorno di x_0			$\rightarrow -\infty$
$\rightarrow l > 0$ per $x \rightarrow x_0$	$\rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow x_0$			$\rightarrow 0$
$\rightarrow l > 0$ per $x \rightarrow x_0$	$\rightarrow -\infty$ per $x \rightarrow x_0$			$\rightarrow 0$

dove per intorno di x_0 si intende un opportuno intorno circolare meno il punto x_0 stesso intersecato con A . La limitatezza è ovviamente riferita al codominio della funzione.

Non si può affermare nulla, invece, nei seguenti casi che per questo vengono chiamati **indeterminati** :

f	g	ovvero
$\rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow x_0$	$\rightarrow -\infty$	$+\infty - \infty$
$\rightarrow 0$ per $x \rightarrow x_0$	$\rightarrow +\infty$	$0 * \infty$
$\rightarrow 0$	$\rightarrow 0$	$0/0$
$\rightarrow +\infty$	$\rightarrow +\infty$	∞/∞

e tutti gli altri casi che si ottengono combinando i segni dell'infinito.

Analoghi teoremi valgono anche per x tendente all'infinito positivo e negativo.

Il calcolo dei limiti indeterminati può essere arduo. Vedremo in seguito (nel capitolo relativo alle derivate) alcuni importanti teoremi utili ad eliminare l'indeterminatezza.

Vale anche il seguente teorema fondamentale di Cauchy (di cui omettiamo la dimostrazione) :

condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione numerica reale converga in un punto appartenente al derivato del dominio è che :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta(\varepsilon) \ni |f(x') - f(x'')| < \varepsilon, \forall x', x'' \in (]x_0 - \delta(\varepsilon), x_0 + \delta(\varepsilon)[- \{x_0\}) \cap A$$

06 – Funzioni monotone.

Una funzione numerica reale f può essere **crescente**, **non decrescente**, **decescente** e **non crescente** se per ogni coppia di punti del dominio x' e x'' , con $x' < x''$, si ha nell'ordine :

$$f(x') < f(x''), \text{ crescente}$$

$$f(x') \leq f(x''), \text{ non decrescente}$$

$$f(x') > f(x''), \text{ decrescente}$$

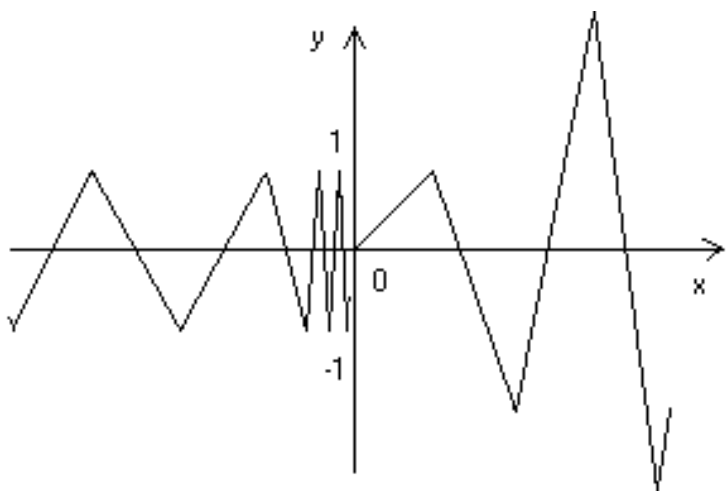
$$f(x') \geq f(x''), \text{ non crescente}$$

In ognuno di questi casi la funzione si dice **monotona**.

Le funzioni monotone possiedono importanti proprietà anche riguardo ai limiti. Omettiamo di esporle perché si tratta di proprietà evidenti.

07 – Limiti inferiori e superiori.

Se una funzione oscilla nel tendere ad un punto o all'infinito, può essere utile definire il limite superiore od inferiore. Non ci addentreremo nell'analisi di questi tipi di limite che illustreremo con il seguente esempio :



Questa funzione diverge oscillando per x che tende all'infinito positivo. Oscilla fra -1 e $+1$ per x che tende all'infinito negativo. Per x che tende a 0^+ essa tende a 0 , per

x che tende a 0^- , essa oscilla fra -1 e $+1$.

I limiti sono :

$$\limsup f(x) = 1 \quad \text{per } x \rightarrow -\infty$$

$$\limsup f(x) = 1 \quad \text{per } x \rightarrow 0^-$$

$$\liminf f(x) = -1 \quad \text{per } x \rightarrow -\infty$$

$$\liminf f(x) = -1 \quad \text{per } x \rightarrow 0^-$$

$$\lim f(x) = 0 \quad \text{per } x \rightarrow 0^+$$

$$\limsup f(x) = +\infty \quad \text{per } x \rightarrow +\infty$$

$$\liminf f(x) = -\infty \quad \text{per } x \rightarrow +\infty$$

Se in un punto o agli infiniti il limite superiore è uguale al limite inferiore, allora essi coincidono con il limite.

Fine.

[Pagina precedente](#)

[Home page](#)